QUESTÃO 1 - SOLUÇÃO

(a) Considerando que a menina se encontra inicialmente na origem das posições ($x = 0$), e que o centro de massa da prancha esteja localizado em seu centro geométrico ($x = L/2$), a posição do centro de massa do sistema (menina + prancha) é dada por

$$x_{cm} = \frac{m.0 + M\frac{L}{2}}{m + M} = \frac{M}{m + M}\frac{L}{2} = \frac{55}{45 + 55}\frac{5,0}{2} = \mathbf{1,4\,m}$$

onde m, M e L denotam a massa da menina, a massa da prancha e o comprimento da prancha, respectivamente.

(b) Neste caso, não há forças externas atuando sobre o sistema e, portanto, o momento linear deve se conservar. Como o momento inicial é nulo, pois os corpos se encontram inicialmente em repouso, temos que

$$mv + MV = 0$$

$$V = -\frac{m}{M}v = -\frac{45}{55}.2,0 = \mathbf{-1,6\,m/s}$$

onde v e V são as velocidades (no referencial do lago) da menina e da prancha, respectivamente, e o sinal negativo na resposta indica que o sentido da velocidade da prancha é oposto ao sentido de movimento da menina.

(c)A velocidade da menina em relação à prancha é $v_{rel} = v - V = 3,6\,m/s$. Assim, o tempo que a menina leva para chegar à extremidade oposta da prancha é simplesmente

$$T = \frac{L}{v_{rel}} = \frac{5,0}{3,6} = \mathbf{1,4\,s}$$

Resolução: Q02-P2:1sem2012

(a) Antes da colisão, o momento linear do *bloco1* é $\vec{p}_{1i}$. Durante a colisão, a força elástica $\vec{F}_{el1}$ age sobre o *bloco1* em um intervalo de tempo Δt. O momento linear após a colisão é, pelo teorema de impulso linear,

$$\vec{p}_{fi} = \vec{p}_{1i} + \int \vec{F}_{el1}\, dt.$$

Significa que o momento linear do *bloco1* **não se conserva**.

(b) As forças perpendiculares à superfície, a reação normal da superfície e a força da gravidade sobre os blocos, se cancelam por que não há movimento nesta direção. Na direção horizontal não há força agindo sobre os blocos, pois a superfície horizontal é sem atrito. Durante a colisão, a força elástica da mola age sobre os blocos. A variação no momento linear do *bloco1* é

$$\Delta\vec{p}_1 = \int \vec{F}_{el1}\, dt$$

e do *bloco2* é

$$\Delta\vec{p}_2 = \int \vec{F}_{el2}\, dt.$$

A terceira lei de Newton diz que $\vec{F}_{el1} = -\vec{F}_{el2}$ e se conclui que

$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$, ou seja, $\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$.

A variação no momento linear do sistema é nula, isto é, o momento linear do sistema **se conserva**.

(c) A superfície horizontal é sem atrito, ou seja, não há força dissipativa atuando no sistema. A força envolvida durante a colisão é elástica e ela é conservativa. O trabalho realizado por esta força durante a colisão (compressão e expansão da mola) é nulo. Pelo teorema trabalho-energia, $\Delta K = W = 0$, conclui-se que a energia cinética do sistema **se conserva**.

(d) Num instante t, durante a colisão, temos

$$\vec{p}_t = \vec{p}_i$$

$$K_t + \frac{k\,x^2}{2} = K_i.$$

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i} \tag{1}$$

$$\frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} \tag{2}$$

Dados do problema:
$m_1 = 1,50kg$; $m_2 = 2,00kg$; $v_{1i} = 4,00m/s$; $v_{2i} = 2,50m/s$; $v_{1f} = 3,00m/s$
A Eq.(1) é escrita como

$$1,50 \times 3,00 + 2,00\, v_{2f} = 1,50 \times 4,00 - 2,00 \times 2,50$$

$$v_{2f} = \frac{6,00 - 5,00 - 4,50}{2,00}$$

Obtemos a velocidade do *bloco2*:

$$\boxed{v_{2f} = -1,75m/s}.$$

O bloco 2 se move para a esquerda.
O valor encontrado é utilizado na Eq.(2):

$$\frac{1,50 \times 3,00^2}{2} + \frac{2,00\,(-1,75)^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{1,50 \times 4,00^2}{2} + \frac{2,00 \times 2,50^2}{2}$$

$$\frac{k\,x^2}{2} = 18,25 - 9,81$$

$$x^2 = \frac{16,87}{600} = 2,81 \times 10^{-2} \Rightarrow \boxed{x = 0,167\,m = 16,7\,cm}$$

.
É a compressão da mola em algum instante na colisão.

(e) A compressão é máxima quando as velocidades dos blocos são iguais. Ver a Eq.(2).
A Eq.(1) é resolvida, considerando $v = v_{1f} = v_{2f}$, e escrevemos na forma escalar,

$$(m_1 + m_2)\,v = m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}.$$

$$(1,50 + 2,00)\,v = 1,50 \times 4 - 2,00 \times 2,50$$

$$v = \frac{1.00}{3,50}.$$

Resulta em $\boxed{\text{v= 0,28 m/s}}$.
A Eq.(2) é reescrita como

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + \frac{k\,X_m^2}{2} = \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2}.$$

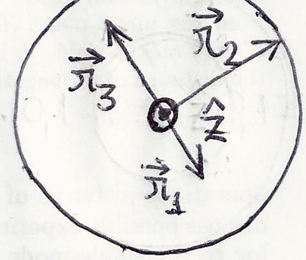
Resolvendo

$$X_m^2 = \frac{36,2}{600} \Rightarrow \boxed{X_m = 24,6\,cm}.$$

É a compressão máxima da mola.

3ª questão:

(a) Definindo o vetor $\hat{z}$ // ao eixo de rotação que aponta para fora do plano do papel e utilizando a regra da "mão direita"



$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = |\vec{r}_1||\vec{F}_1| \operatorname{sen} 90^\circ \hat{z}$$

(0,1) $$= 0{,}1 \cdot 1 \cdot 1 \hat{z}$$

$$= 0{,}1 \hat{z} \text{ Nm}$$

(0,1) $$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = |\vec{r}_2||\vec{F}_2| \operatorname{sen} 90^\circ \hat{z}$$

$$= 0{,}22 \cdot 3 \cdot 1 (-\hat{z}) = -0{,}66 \hat{z}$$

(0,1) $$\vec{\tau}_3 = \vec{F}_3 \times \vec{r}_3 = 0$$

0 em t [0,4] s

(b) $$\vec{\tau}^{\,TOTAL} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = 0{,}1\hat{z} - 0{,}66\hat{z} = -0{,}56\hat{z}$$

(0,2)

(c) $$\tau_z = I\alpha$$ (0,5)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2}{MR^2}\tau = -\frac{2 \cdot 0{,}56}{3{,}1 \cdot 0{,}22^2} = -7{,}46 \text{ rad/s}^2$$ (0,5)

(d) De acordo com a def. do sentido do $\vec{\tau}$,

(0,2) • Se $\vec{\tau}^{\,resultante}$ // $\hat{z}$ o disco começa a rodar no sentido antihorário

• Se $\vec{\tau}^{\,resultante}$ // $-\hat{z}$ ——————————— horário.

Como no intervalo $t = [0,4]$ s $\vec{\tau} = -0{,}56\hat{z}$, a rotação se dá no sentido horário.

$$\text{(e)}\quad \vec{\tau}^{\,Total}(t=6s) = \underbrace{\cancel{\vec{\tau}_1}}_{\substack{0\\F_1=0}} + \underbrace{\cancel{\vec{\tau}_2}}_{\substack{0\\F_2=0}} + \vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

(0,3)

$$= |\vec{r}_3||\vec{F}_3| \operatorname{sen} 90^\circ \, \hat{z}$$

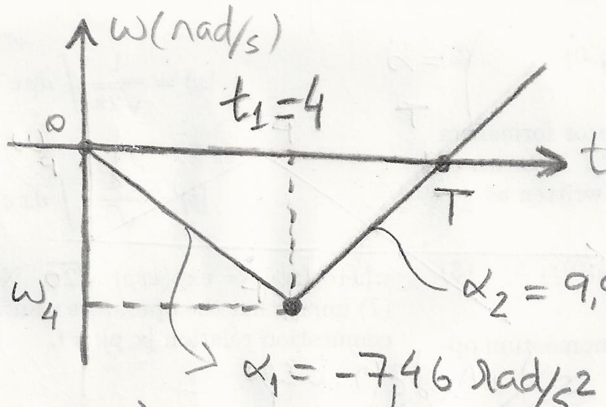
$$= 0{,}15 \cdot 5 \cdot 1 \, \hat{z}$$

$$= 0{,}75 \, \hat{z} \text{ Nm}$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2\cdot\tau}{MR^2} = \frac{2\cdot(0{,}75)}{3{,}10(0{,}22)^2} = 9{,}99 \text{ rad/s}^2$$

(f) O movimento do disco pode ser representado graficamente como:

(1,0)



- ETAPA 1 $(t=[0,4])$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_1 t$$

$$\omega = 0 - 7{,}46t$$

em $t = 4s$

$$\omega_4 = -7{,}46\cdot 4 = -29{,}84 \text{ rad/s}$$

- ETAPA 2 $(t>4s)$

$$\omega = \omega_4 + \alpha_2(t-4)$$

$$\omega = -29{,}84 + 9{,}99(t-4)$$

p/ $t = T \Rightarrow \omega = 0$

$$0 = -29{,}84 + 9{,}99(T-4)$$

$$T = \frac{29{,}84}{9{,}99} + 4$$

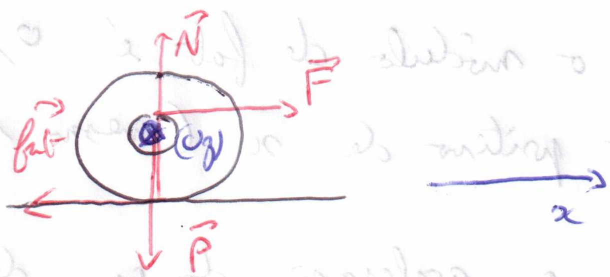
$$T \simeq 7s$$

Questão 4

a) O carretel é constituído de 2 cilindros externos e de um terceiro menor. A inércia rotacional do carretel em relação ao eixo de rotação que passa pelo c.m é:

$$I_{cm} = 2 \times \frac{1}{2} M_e R_e^2 + \frac{1}{2} M_i R_i^2 = \frac{3}{2} M_e R_e^2 = 1{,}5\ kg \cdot m^2$$

b) Sistema {Carretel}



• 2ª lei de Newton: $\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm}$

Com M a massa total do sistema ($M = M_i + 2 M_e = 11\,kg$)

$$\vec{fat} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F} = M \vec{a}_{cm}$$

Projetando em x : $-fat + F = M a_{cm}$ (1)

• Equação da dinamica rotacional ~~[illegible]~~ em relação ao eixo (Oz):

$$\sum \tau_{ext} = I_{cm} \alpha$$

$$\tau_{Oz}(\vec{F}) + \tau_{Oz}(\vec{fat}) = R_i F + R_e fat = I_{cm} \alpha$$

$$\Leftrightarrow R_e \left(\frac{F}{3} + fat \right) = I \alpha \quad (2)$$

Como o rolamento é sem deslizamento temos que $a_{cm} = R_e \alpha$

Substituindo em (2):

$$R_e \left(\frac{F}{3} + fat \right) = \frac{3}{2} M_e R_e^2 \frac{a_{cm}}{R_e} \Leftrightarrow \frac{F}{3} + fat = \frac{3}{2} M_e a_{cm} \quad (3)$$

O sistema de equações a resolver fica:

$$\begin{cases} F - fat = 11 M_e a_{cm} & (1) \\ F/3 + fat = \frac{3}{2} M_e a_{cm} & (3) \end{cases}$$

Somando as duas equações chegamos a: $a_{cm} = \frac{8}{75} F = \frac{8}{15} = 0,53 \, m/s^2$

c) Substituindo a_{cm} em (1) obtemos:

$$fat = F - 11 M_e a = F - 11 \frac{8}{75} F = -\frac{13}{75} F = -\frac{13}{15} = -0,87 N$$

Portanto o módulo de fat é 0,87 e ~~seu~~ seu sentido é no sentido positivo de x (mesmo sentido que $\vec{F}$).

d) Como a aceleração do cm do carretel é cte, podemos aplicar a formula de Torricelli:

$$v_{cm}^2 = \underbrace{v_0^2}_{=0} + 2 a_{cm} L = 2 \times \frac{8}{15} L = \frac{32}{15}$$

$$\Rightarrow v_{cm} = 1,46 \, m/s$$

$E_c = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ com $\omega = \frac{v_{cm}}{R_e}$ (rolamento sem deslizamento)

$$= \frac{1}{2} \times 11 M_e v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M_e R_e^2\right) \frac{v_{cm}^2}{R_e^2}$$

$$= \left(\frac{11}{2} + \frac{3}{4}\right) v_{cm}^2$$

$$E_c = \frac{25}{4} v_{cm}^2 = \frac{25}{4} \times \frac{32}{15} = \frac{40}{3} = 13,3 \, J$$